Karlsruher Institut für Technologie

1. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung – Lösungshilfen

Einführung

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe zweier Abfüllmaschinen werden Flaschen mit Wasser befüllt. Hierbei soll pro Flasche 1 l eingefüllt werden. Aufgrund von Verzögerungen beim Öffnen und Schließen der Ventile kann mit diesen Maschinen die Abfüllmenge nur mit einer Standardabweichung von 0,06 l eingehalten werden. Der systematische Fehler sei vernachlässigbar.

a) Es ist bekannt, dass das abgefüllte Volumen bei einer der Maschinen einer Gleichverteilung folgt. Ist es wahrscheinlicher, dass eine Flasche mit etwa 0,9 l oder etwa 0,8 l befüllt wird? Bestimmen Sie hierzu die Intervallbreite der Gleichverteilung.

b) Bei der anderen Maschine folgt das Volumen der eingefüllte Wassermenge einer Normalverteilung. Ist es wahrscheinlicher, dass eine Flasche mit etwa 0,9 l oder etwa 0,8 l befüllt wird?

c) Welcher der beiden Maschinen würden Sie kaufen, wenn Sie möglichst genau 1 l einfüllen sollen?

Lösung

a) Mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}06$ und dem Mittelwert $\mu = 1$ berechnet sich die Länge des Bereichs der möglichen abgefüllten Volumen zu:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{12} \cdot (\mu + a - (\mu - a))^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot (2a)^2 \\ \rightarrow 2a &= 0{,}2078. \end{aligned}$$

Dies liefert den Abfüllbereich $[0{,}8961\,\mathrm{l};\ 1{,}1039\,\mathrm{l}]$. Somit ist es wahrscheinlicher, dass die Flasche mit etwa 0,9 l befüllt wird.

b) Mit dem Mittelwert $\mu = 1$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}06$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte an den Stellen 0,8 und 0,9 zu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right) \text{ mit}$$
$$f(0{,}9) = 1{,}6580$$
$$f(0{,}8) = 0{,}0257$$

Da $f(0{,}9)$ einen größeren Wert aufweist als $f(0{,}8)$, ist es wahrscheinlicher, dass die Flasche mit etwa 0,9 l befüllt wird.

c) Die Maschine aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 2: Korrelation und Kovarianz diskreter Zeitsignale

Gegeben sind die Signale $y_1(n)$ und $y_2(n)$, die als Realisierungen eines Zufallsprozesses angesehen werden können:

n	$y_1(n)$	$y_2(n)$
1	6	8
2	4	8
3	2	6
4	8	6
5	8	4
6	6	2

a) Bestimmen Sie die Werte der Korrelationsfunktion $r_{y_1y_2}(k)$ für die Zeitverschiebungen $k \in \{-3, 0, 3\}$.

b) Bestimmen Sie die Werte der Kovarianzfunktion $C_{y_1y_2}(k)$ für die Zeitverschiebungen $k \in \{-3, 0, 3\}$. Bei welcher der drei betrachteten Zeitverschiebungen besitzen die Signale die größte Abhängigkeit? Wie lässt sich der Unterschied zu den berechneten Korrelationswerten erklären?

Lösung

a) Die Werte der Korrelationsfunktion können folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} r_{y_1y_2}(k) &= \mathrm{E}\{y_1(n+k)\, y_2(n)\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} y_1(i+k)\cdot y_2(i)\,, & \text{falls } k \geq 0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N+k} y_1(i)\cdot y_2(i-k)\,, & \text{falls } k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit lauten die Werte der Korrelationsfunktion:

- $k = -3$:

$$\begin{aligned} r_{y_1y_2}(-3) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} y_1(i)\cdot y_2(i+3) \\ &= 9{,}33 \end{aligned}$$

- $k = 0$:

$$r_{y_1y_2}(0) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_1(i) \cdot y_2(i)$$
$$= 30{,}67$$

- $k = 3$:

$$r_{y_1y_2}(3) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} y_1(i+3) \cdot y_2(i)$$
$$= 27{,}33$$

b) Die Werte der Kovarianzfunktion können aus den mittelwertfreien Signalen gewonnen werden:

$$C_{y_1y_2}(k) = \mathrm{E}\left\{(y_1(n+k) - \mathrm{E}\{y_1\}) \cdot (y_2(n) - \mathrm{E}\{y_2\})\right\}.$$

Somit lauten die Werte der Kovarianzfunktion:

$$C_{y_1y_2}(-3) = 2{,}722$$
$$C_{y_1y_2}(0) = -1{,}444$$
$$C_{y_1y_2}(3) = 1{,}833.$$

Die größte Abhängigkeit ergibt sich für $k = -3$. Durch die Berücksichtigung der Zeitmittelwerte der Signale entfällt die Gewichtung durch das Dreieckfenster (Faltung zweier Rechtechfunktionen), welche bei der Korrelation noch enthalten ist.

Aufgabe 3: Korrelation und Kovarianz zweidimensionaler Signale

Es soll die 2D-Position eines Objektes geschätzt werden. Dazu wird zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten (t_0, t_1, t_2) mit Hilfe von vier Sensoren jeweils eine Messung durchgeführt:

$$\boldsymbol{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix}3\\3{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3(t_0) = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4(t_0) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}_1(t_1) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t_1) = \begin{pmatrix}3\\4{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3(t_1) = \begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4(t_1) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}_1(t_2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t_2) = \begin{pmatrix}2\\4{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3(t_2) = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4(t_2) = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

Die Messungen können als Realisierungen eines Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$ aufgefasst werden.

a) Schätzen Sie die Autokorrelationsmatrizen $\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t)$ zu den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2 aus den Beobachtungen $\boldsymbol{x}_i(t)\,,\ i = 1, 2, 3, 4$.

b) Schätzen Sie die Autokovarianzmatrizen $\hat{\boldsymbol{C}}_{xx}(t)$ aus den vier Beobachtungen für jeden Zeitpunkt. Was bedeuten diese Werte anschaulich?

Lösung

a) Es liegen $M = 4$ Beobachtungen pro Zeitpunkt vor. Die Autokorrelationsmatrix ergibt sich zu einem beliebigen Zeitpunkt t aus

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t) = \frac{1}{M} \cdot \mathrm{E}\big\{\boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{X}^*(t)\big\}\,,$$

mit

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) & \boldsymbol{x}_3(t) & \boldsymbol{x}_4(t)\end{bmatrix}.$$

Die Schätzungen der Autokorrelationen zu verschiedenen Zeitpunkten lauten somit:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t_0) &= \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3{,}5 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3{,}5 \\ 3 & 0{,}5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 5{,}625 \end{pmatrix} \\
\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t_1) &= \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 10{,}625 \end{pmatrix} \\
\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t_2) &= \begin{pmatrix} 6{,}25 & 7{,}5 \\ 7{,}5 & 10{,}625 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Die Schätzungen der Autokovarianzmatrizen können aus den berechneten Autokorrelationsmatrizen bestimmt werden:

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{xx}(t) = \hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(t) - \boldsymbol{\mu}_x(t)\,\boldsymbol{\mu}_x^{\mathrm{T}}(t)\,.$$

Somit müssen zunächst die Mittelwerte der stochastischen Prozesse geschätzt werden. Mit

$$\boldsymbol{\mu}_x(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{x}_i(t)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_x(t_0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\mu}_x(t_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\mu}_x(t_2) &= \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit lauten die Autokovarianzmatrizen:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{C}}_{xx}(t_0) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1{,}625 \end{pmatrix} \\
\hat{\boldsymbol{C}}_{xx}(t_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1{,}625 \end{pmatrix} \\
\hat{\boldsymbol{C}}_{xx}(t_2) &= \begin{pmatrix} 1{,}1875 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1{,}625 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Einträge der Autokovarianzmatrizen liefern eine Aussage über die Streuung der gemessenen Positionen der unterschiedlichen Sensoren zu dem jeweiligen betrachteten Zeitpunkt. Die Einträge entlang der Hauptdiagonalen beinhalten hierbei die Streuung der Messwerte entlang einer der beiden Dimensionen (x-, bzw. y-Richtung). Die Nebendiagonale liefert eine Aussage über die Streuung der Werte entlang beider Dimensionen.

Es ist zu Erkennen, dass die Streuungen der gemessene Positionen für den Zeitpunkten t_0 und t_1 gleich groß sind. Zum Zeitpunkt t_2 gibt es entlang der x-Richtung eine geringere Streuung der Messwerte im Vergleich zu den anderen Zeitpunkten, was auf eine genauere Messung dieser Position schließen lässt.